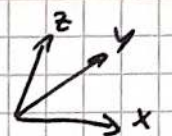
Mechanik einer Punktmasse I

Kinematik: Bew. ohne Betrachtung der Kräfte

Punktmasse: Idealisierung auf ein punktförmiges Teilchen
→ Ladung / Masse in einem Punkt

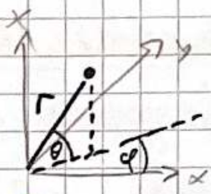
Bezugssystem: Koordinatensystem

- kartesisch



rechtshändig

- Kugelkoordinaten
"polar"



r Abstand
θ Polarwinkel
φ Azimut

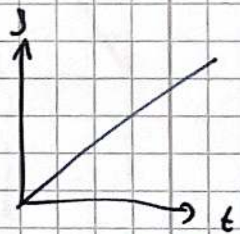
$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$

$z = r \cdot \sin\theta$

Gleichförmige Bew.

Eindimensionale Bew. in x-Richtung beginnend bei x_0



Orts-Zeit-Gesetz: $s(t) = x(t) - x_0$

$s(t) \sim t$

$s(t) = v \cdot t$, $v = \text{const.}$ (v: Geschw.)

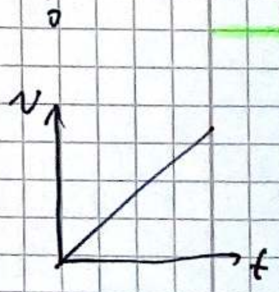
$v = \frac{s}{t}$ $[v] = m/s$

$v = \Delta s / \Delta t$

Zurückgelegter Weg: $s = vt$

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau = \int_0^t v \cdot d\tau = vt$$

Gleichmäßig Beschleunigte Bew.



$\Delta v = a \cdot \Delta t$ $a = \text{const}$ (a: Beschleunigung)

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}$

$[a] = m/s^2$

$v(t) = a \cdot t + v_0$

$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ $a = \text{const}$

stroposkopische Aufnahme: Blitze jede x Sek., Bewegungszustände, "Diskoblitz"

Mechanik einer Punktmasse II

Freier Fall → gleichförmig beschl. Bew.

$s(t) = \frac{g}{2} t^2$ $\quad$ g Fallbeschl. $9{,}81\ m/s^2$

Durchschnittsgsw. & Momentangsw.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{ds}{dt}$ $\quad$ $v(t) = s'(t) = \dot{s}$

$a(t) = \ddot{s} = \dot{v}$

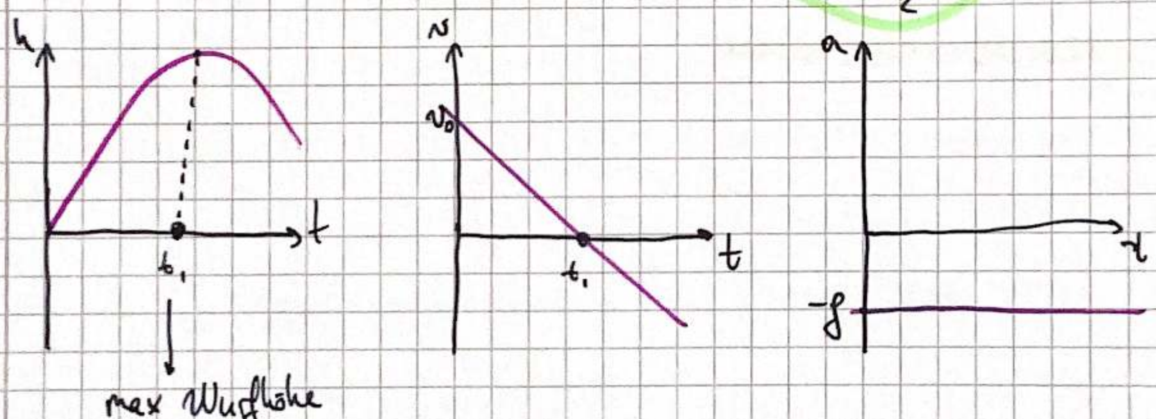
Senkrechter Wurf

Anfangsgsw v_0 nach oben

Beschl. $-g$ nach unten

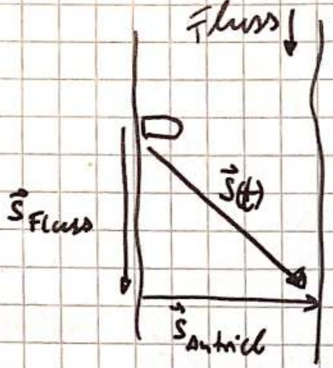
$v(t) = v_0 - gt$

$h(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t$



MeP – Mehrdimensionale Bew.

Superpositionsprinzip → x-Bew betrachtet unabhängig von y-Bew

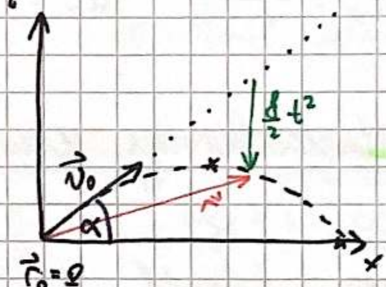


$$\vec{s} = \vec{s}_{Fluss} + \vec{s}_{Antrieb}$$

Schiefer Wurf

Anfangsgeschw $\vec{v}_0$

Beschl. $\vec{g}$



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0}$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

$$z(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} t^2$$

$$\boxed{z(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2}$$

$$\boxed{x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}$$

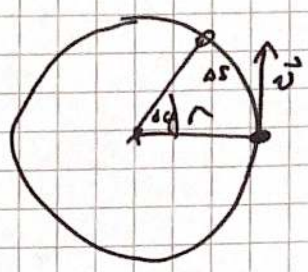
$$\boxed{z(x_{max}) = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2(\alpha)}$$

$$\boxed{x_{Ende} = 2\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)}$$

Kreisbewegungen

Gleichförmige Kreisbew. → Beschleunigt!

Drehwinkel $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$ (rad)



Winkelgsw. $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

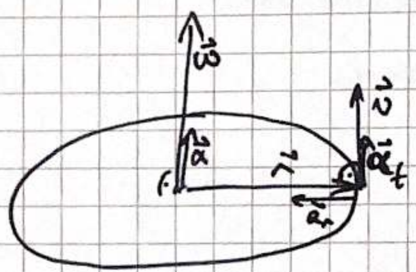
Bahngsw. $|\vec{v}| = r \cdot \omega$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ → Rechte-Hand-Regel

↑ Drehachse

Radialbeschl. / Zentripetalbeschl.

$a_r = \frac{v^2}{r}$ $\vec{a}_r = -\omega^2 \cdot \vec{r}$



Ungleichförmige Kreisbew.

$\omega(t) = \dot{\varphi}$

Winkelbeschl. $\alpha(t) = \ddot{\varphi}$

Tangentialbeschl. $a_t = \alpha \cdot r$

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

geradlinige Bew. $a = const$	Drehbew. $\alpha = const$
$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$	$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
$v = \dot{s} = a t + v_0$	$\omega = \frac{v}{r} = \dot{\varphi} = \alpha t + \omega_0$
$a = \dot{v}$	$\alpha = \frac{a_t}{r} = \dot{\omega}$

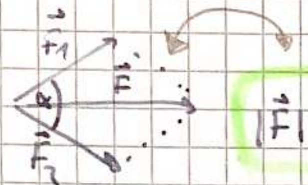
Dynamik II

Kraft: Ursache für Beschl., Deformation, Umwandlung

Federkraft $\boxed{\vec{F} = -k \cdot \vec{x}}$ Hookesches Gesetz

Auslenkung

Federconst.



$\boxed{|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}}$

$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0}$

Gleichgewicht

stabil labil

$F = 0 \Leftrightarrow v = \text{const.} \longrightarrow F \sim a$

$F = \text{const} \Leftrightarrow a > 0 \longrightarrow a \sim \frac{1}{m}$

$\downarrow$

$\boxed{F = m \cdot a}$

Newtonsche Axiome

Newton 1 $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{const}$ $(\vec{v} \neq \text{const} \rightarrow \vec{F} \neq 0)$

Newton 2 $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $[F] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$

träge Masse

Newton 3 actio = reactio

$m_s \sim m_t$ Äquivalenz von schwerer u. träger Masse

Bestimmung einer Masse durch Kreisbew.

Zentripetalkraft $\boxed{F_z = m \cdot a_z = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r}}$

$m \sim V$ Dichte: $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$

$\boxed{\rho_{Luft} = \frac{1\,kg}{m^3}}$ $\boxed{\rho_{Wasser} = \frac{1000\,kg}{m^3}}$

$\boxed{\rho_{Gold} = 19300\,\frac{kg}{m^3}}$ $\boxed{\rho_{Kernmaterie} = 2 \cdot 10^{17}\,\frac{kg}{m^3}}$

Dynamik II

Impuls $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$

Grundgesetz der Dynamik: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$

Punktmassen **ohne äußere Kräfte:**

→ nur innere Kräfte: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

→ $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$

→ $\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0}$ → Gesamtimpuls ist erhalten

Impulserhaltungssatz

Massenmittelpunkt / Schwerpunkt

$\boxed{\vec{x}_s = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}}$ $\boxed{\frac{d\vec{x}_s}{dt} = const}$

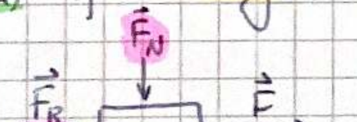
$\boxed{v_s = \frac{d\vec{x}_s}{dt} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}}$ $\boxed{\vec{a}_s = \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2}}$

→ $\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{a}_s}$

Schwerpunkt bewegt sich so, **als ob die gesamte Masse** in ihm **vereint** wäre und die **Gesamtkraft** an ihm angreift.

Reibungskräfte

(F_{RH}) **Haftreibung** / **Gleitreibung** (F_{RG})



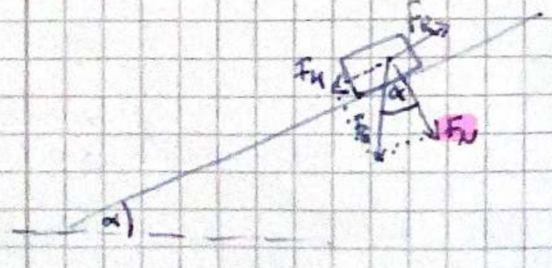
$\boxed{F_{RH} = \mu_0 F_N}$ $\boxed{F_{RG} = \mu F_N}$

Haftreibungszahl Gleitreibungszahl

Coulombsches Reibungsgesetz

	μ	μ_0
Stahl/Stahl	0,12	0,15
Gummi/Asphalt	0,5..0,6	0,7..0,8

→ ABS



$F_N = F_G \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

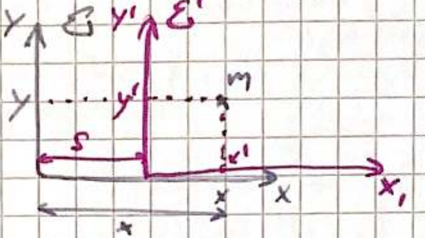
$F_R = \mu F_N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$F_H = F_G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

Dynamik VI

Bewegte Bezugssysteme

- geradelinig
  entlang x-Achse



$x = x' + s$
$y = y'$
$z = z'$

$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{s}(t)}$

$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

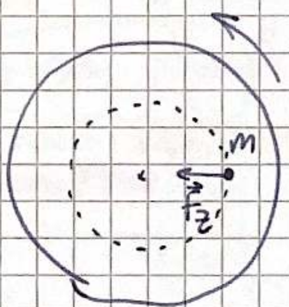
$m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = m \cdot \ddot{\vec{r}}'(t) + m \cdot \ddot{\vec{s}}(t)$

$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{s}} = \vec{F} + \vec{F}_T}$

$\vec{F}_T$: Trägheitskraft

(tritt auf wenn Bezugssystem sich beschleunigt bewegt)

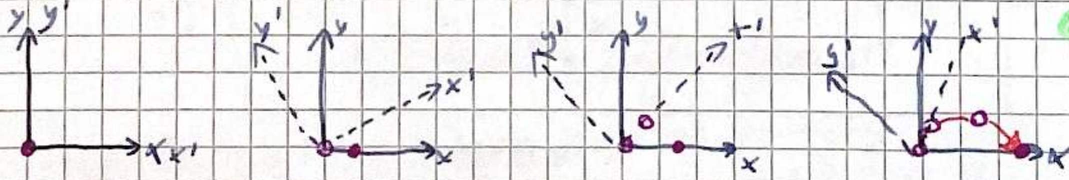
- rotierend



$\boxed{\vec{F}_Z = -m \cdot \omega^2 \vec{r}}$

im rotierenden Bezugssystem:

Zentrifugalkraft $\boxed{\vec{F}_T = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}}$



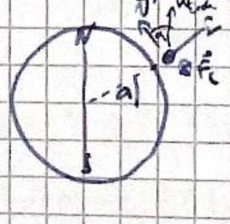
v' Anfangsgsw.

$\boxed{y' = r \cdot \varphi = \underbrace{v't}_{r} \cdot \underbrace{\omega t}_{\varphi} = \underbrace{v'\omega}_{\substack{const \\ = \frac{1}{2}a}} \cdot t^2}$ → beschl. Bew. mit Beschl. $\boxed{a_c = 2 \cdot v'\omega}$

also: Corioliskraft $\boxed{F_C = 2 \cdot m \cdot v' \cdot \omega}$

$\boxed{\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}}$

- Eisbär jäger
- Hoch-/Tiefdruckgebiete (auf der Nord HK nach rechts)
- Foucault'sches Pendel



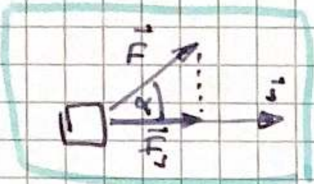
$\boxed{F_C = 2 \cdot m \cdot v' \cdot \omega_{Erde} \cdot \sin\alpha}$ → volle Rotation der Sw.-Ebene $\boxed{\frac{24h}{\sin\alpha}}$ Std.

(Aachen: $\alpha = 51°$)

Arbeit, Leistung, Energie I

Arbeit: Kraft F gegen eine externe Kraft über den Weg s → Arbeit $\boxed{W = F \cdot s}$ verrichtet

$\boxed{[W] = N \cdot m = J}$



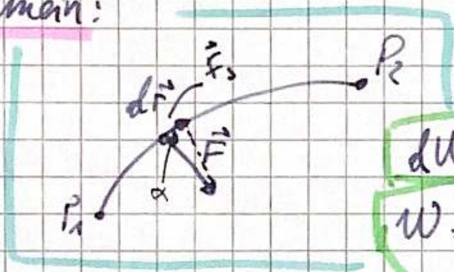
$\boxed{F_s = F \cdot \cos(\alpha)}$

$\boxed{W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)}$

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

- $W > 0$ wir verrichten Arbeit
- $W < 0$ externe Kraft verrichtet Arbeit an uns

Allgemein:

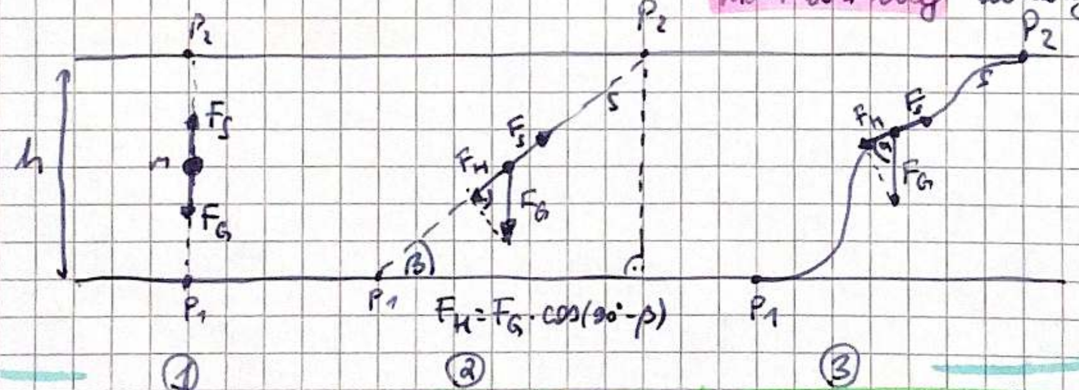


$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$

$\boxed{W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$ „Wegintegral"

$\boxed{= \int_{P_1}^{P_2} F \cdot \cos(\alpha)\, ds}$

Schwerkraft → konservative Kraft (Arbeit nur von P_1 u. P_2, nicht vom Weg abhängig)



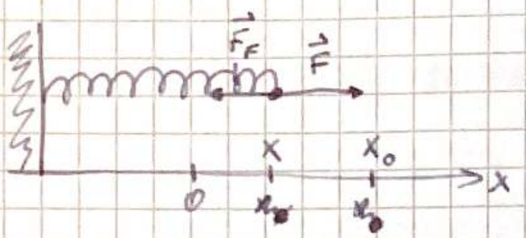
① $\boxed{W = \underline{m \cdot g \cdot h}}$

② $\boxed{\begin{aligned} W &= m \cdot g \cdot s \cdot \cos(90° - \beta) \\ &= m \cdot g \cdot s \cdot \sin(\beta) \\ &= \underline{m \cdot g \cdot h} \end{aligned}}$

③ $\boxed{\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} F_s\, ds = \int_{P_1}^{P_2} F_G \cos\alpha\, ds \\ &= \int_0^h m \cdot g\, dh = \\ &= \underline{m \cdot g \cdot h} \end{aligned}}$

Arbeit über geschlossenen Weg $= 0$

Arbeit, Leistung, Energie V



Federkraft $\boxed{\vec{F}_F = -k \cdot \vec{x}}$

Spannen der Feder $\boxed{\vec{F} = k \cdot \vec{x}}$

$$\boxed{W = \int_0^{x_0} k\vec{x}\, d\vec{x} = k \int_0^{x_0} x\, dx = \frac{k \cdot x_0^2}{2}}$$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = m \cdot v dv = \frac{1}{2} m\, d(v^2)$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{v_0^2}^{v^2} \frac{1}{2} m\, d(v^2) = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

$\boxed{W = \frac{1}{2} m v^2}$

Leistung $\boxed{P = \frac{W}{t}}$ (W = const.) $\boxed{[P] = \frac{J}{s} = W}$ $1 PS \approx 735 W$

Momentanleistung $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$

$$dW = F ds \rightarrow P = \frac{F ds}{dt} = F \cdot v \rightarrow \boxed{P = F \cdot v}$$

Energie E: Vermögen, Arbeit zu leisten $\boxed{[E] = J}$

Potentielle Energie:
- Lage im Kraftfeld, Zustand
- Kraft muss konservativ sein
- jeder Punkt eindeutige Energie
- Nullpunkt willkürlich

$\boxed{E = m \cdot g \cdot h}$
$\boxed{E = \frac{kx^2}{2}}$

Kinetische Energie:
- Bewegung

$\boxed{E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$

Freier Fall

$\boxed{\frac{dE_{pot}}{dt} = -m \cdot g \cdot v}$ $\boxed{\frac{dE_{kin}}{dt} = m \frac{dv}{dt} v = m \cdot g \cdot v}$

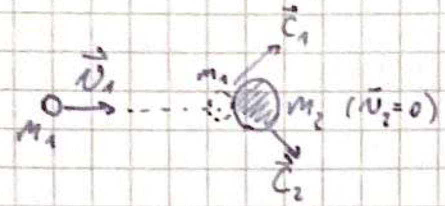
$$\boxed{E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = \text{const}}$$

Konservative Kraft: mechanische Energie ($E_{pot} + E_{kin}$) erhalten

Energieerhaltungssatz: in einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie erhalten (empirisch)

Arbeit, Leistung, Energie III

Elastischer Stoß: Metallkugel
→ kin. Energie bleibt gleich



Impulserhaltung: $m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{c}_1 + m_2 \vec{c}_2 \rightarrow \mathrm{I}$

Energieerhaltung: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2 \rightarrow \mathrm{II}$

eindimensional:

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{I})\quad & m_1 (v_1 - c_1) = m_2 c_2 \\ (\mathrm{II})\quad & m_1 (v_1^2 - c_1^2) = m_2 c_2^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\mathrm{II} : \mathrm{I}} v_1 + c_1 = c_2 \quad (\mathrm{III})$$

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{III}} \rightarrow m_1 (v_1 - c_1) = m_2 (v_1 + c_1) \rightarrow \boxed{c_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1} \quad (\mathrm{IV})$$

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{IV}} \rightarrow \boxed{c_2 = \frac{m_1 (v_1 - c_1)}{m_2} = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}}$$

$m_1 = m_2 \rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = v_1$

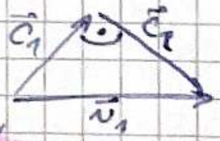
$m_2 \rightarrow \infty \rightarrow c_1 = -v_1, \quad c_2 = 0$

$m_1 \rightarrow \infty \rightarrow c_1 = v_1, \quad c_2 = 2 v_1$

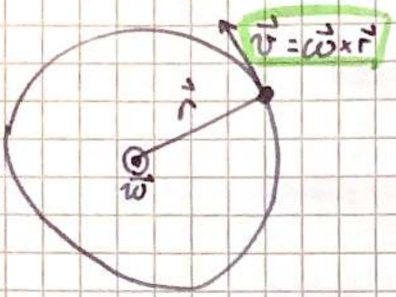
zweidimensional:

gleiche Masse: $\vec{v}_1 = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$ → Dreieck

$v_1^2 = c_1^2 + c_2^2$ → rechter Winkel $\vec{c}_1 \perp \vec{c}_2$



Arbeit, Leistung, Energie in Drehbew.en



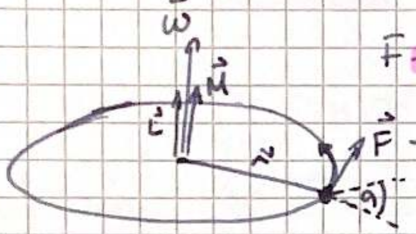
$\omega = const$

$$\boxed{E_{kin} = \underbrace{\frac{1}{2} m r^2}_{J} \omega^2} \qquad \boxed{J = m \cdot r^2} \text{ Punktmasse}$$

J Trägheitsmoment $\boxed{[J] = kg \cdot m^2}$

$$\boxed{= \frac{1}{2} J \omega^2}$$

um die gleiche Achse additiv



F tangential

$$\boxed{dW = F ds = F (r d\varphi) = \underbrace{(F r)}_{M} d\varphi = M d\varphi}$$

Drehmoment $\boxed{[M] = N \cdot m}$ (nicht J)

Allgemein: $\boxed{M = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)}$ $\rightarrow \sin \measuredangle(\vec{F}, \vec{r})$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Leistung: $\boxed{P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega}$ $\qquad \boxed{P = \frac{d E_{kin}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = J \omega \dot{\omega} = J \omega \alpha}$

$$\boxed{M = J \cdot \alpha}$$

($\hat{=}$ $F = m \cdot a$)

α - Winkelbeschl.

$$\boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}}$$

$J = const.$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ $\rightarrow$ Drehimpuls $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

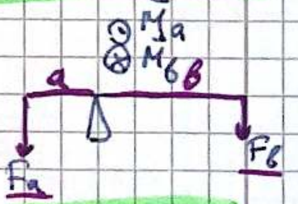
($\hat{=}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

$$\boxed{[L] = Nms = \frac{kg \cdot m^2}{s}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Drehimpulserhaltungssatz: $\boxed{\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = const}}$

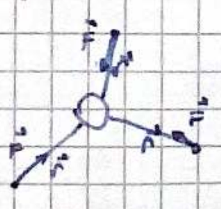
$\vec{M} = 0$: Gleichgewicht $\rightarrow$ Hebelgesetz



$$\boxed{a F_a = b F_b}$$

Masse in Zentralkraft

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \vec{L} = const}$$

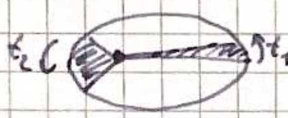


Gravitation

Keplersche Gesetze

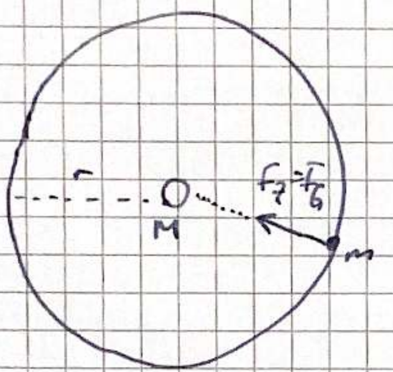
Kepler I: Umlaufbahnen sind Ellipsen, Sonne Brennpunkt

Kepler II:



Flächen gleich

Kepler III: $\boxed{\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \dots = const}$ → Umlaufzeit → Halbachse



$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$

K3: $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sim \frac{1}{r^3}$ → $T^2 \sim a^3$

→ $F_G = \frac{m}{r^2}$

N3 → $\boxed{F_G = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}}$

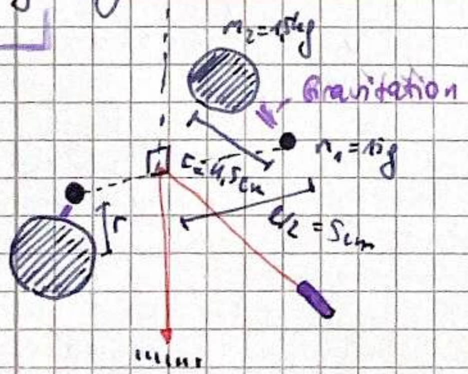
Gravitationsgesetz (Newton 1687)

γ: Gravitationskonst. $= \boxed{6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}}$

R = 6300 km (zum Erd-Mittelp.)

M = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg (Erde)

Gravitationsdrehwaage von Cavendish (1798)



$F = 2\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Vergrößerungsfaktor $2\frac{L}{l/2} \approx 800$

$s = 2\frac{L}{l/2} \cdot \frac{1}{2} a t^2 = 4\frac{L}{l}\gamma\frac{m_2}{r^2} t^2$

$\approx 4 \cdot 10^{-3} \frac{cm}{s^2} t^2$ mit $\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

lineare Bew. vs. Drehbew.

Weg	$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0$	Drehwinkel	$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
Geschwindigkeit	$v = \dot{s} = at + v_0$	Winkelgsw.	$\omega = \frac{v}{r} = \dot{\varphi} = \alpha t + \omega_0$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{s}$	Winkelbeschl.	$\alpha = \frac{a}{r} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse	m	Trägheitsmoment	$J = m \cdot r^2$
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Drehmoment	$\vec{M} = J\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	kin. Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$
Arbeit	$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s \cdot ds$	Arbeit	$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi$
Leistung	$P = F \cdot v$	Leistung	$P = M \cdot \omega$